COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 4 heures)

L'objet du problème consiste à étudier quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle :

(1) $x \frac{dy}{dx} = x + y^2$

PARTIE I

I.1 - Montrer que l'équation (1) se ramène à une équation différentielle linéaire du 2ème ordre notée (2), si l'on effectue le changement de fonction inconnue :

$$y = -\frac{x}{z}\frac{dz}{dx}$$

I.2 - Soit une série entière $z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

a) - Quelles relations doivent vérifier les termes de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ pour que la série entière z(x) soit solution de (2) ?

b) - Donner toutes les fonctions développables en séries entières solutions de (2) et préciser leur rayon de convergence.

I.3 - On notera $z_0(x)$ la série entière solution de (2) et telle que $z_0(0) = 1$.

a) - Ecrire l'expression de $z_0(x)$ en précisant les valeurs des coefficients $(a_n)_{n \geq 0}$, et montrer que pour $x \leq 0$ on a :

$$z_0(x) \geq 1 \text{ et } z_0'(x) \leq -1$$

b) - Montrer que z_0 admet un plus petit zéro, r , positif, que l'on encadrera entre deux entiers successifs.

c) - (Facultatif) Donner une valeur approchée de r à deux décimales.

I.4 - Pour cette question, on admettra que le produit de deux séries entières de rayons de convergence R et R' se fait par la même règle que le produit de deux polynômes ordonnés suivant les puissances croissantes, et fournit une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal au plus petit des deux rayons R et R'.
De plus, la fonction somme de la "série produit" est le produit des fonctions sommes des deux séries initiales dans les limites d'existence de ces deux fonctions. Ces propriétés sont valables pour le carré d'une série entière.

a) - Montrer qu'il existe une série entière unique $y_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ solution de l'équation (1).

b) - Montrer, en particulier, que les coefficients b_n de cette série vérifient alors :

$$\forall \ n \geq 1, \ 0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$$

et en déduire un minorant du rayon de convergence de cette série entière.

c) - A quelle(s) solution(s) de l'équation (2) est associée $y_0(x)$ (on pourra admettre que si une fonction f(x) admet un développement en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence non nul, alors la fonction $g(x) = e^{f(x)}$ admet aussi un tel développement avec un rayon de convergence non nul).

PARTIE II

On se propose d'étudier l'allure des solutions y(x) de l'équation (1) au voisinage de x = 0. Pour $y(x) \neq y_0(x)$, on effectue dans l'équation (1) le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) + \dfrac{1}{\omega(x).z_0(x)^2}$

II.1 -

a) - Ecrire l'équation (3) vérifiée par $\omega(x)$.

Montrer, en utilisant la continuité de $z_0(x)^2$ en 0, qu'il existe trois réels $\varepsilon > 0$, $a > 0$ et c, tels que :

$$\forall\ x \in]0, a],\ \omega(x) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{Log} \frac{a}{x} + c$$

b) - Montrer de même qu'il existe $a' < 0$ et c' tels que :

$$\forall\ x \in [a', 0[\ ,\ \omega(x) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \operatorname{Log} \frac{a'}{x} + c'$$

c) - En déduire la limite de y(x) quand x tend vers 0.

II.2 -

a) - Donner un équivalent $\tilde{\omega}(x)$ de $\omega(x)$ au voisinage de zéro et écrire un développement limité au premier ordre de $\omega(x) - \tilde{\omega}(x)$.

(Pour ce qui concerne le terme constant, on se bornera à établir son existence dans les deux cas $x > 0$ et $x < 0$ sans chercher à le calculer)

b) - Vérifier qu'au voisinage de 0, on peut écrire :

$$y(x) = \tilde{y}(x) + x.\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et où l'on explicitera $\tilde{y}(x)$; donner l'allure au voisinage de 0 de la courbe $y = y(x)$ en précisant notamment la tangente et la position de la courbe par rapport à celle-ci.

II.3 - Donner sous la même forme l'allure au voisinage de 0 de la courbe $y = y_0(x)$

PARTIE III

On s'intéresse à présent à l'allure générale des courbes solutions de l'équation (1), et en particulier à $y = y_0(x)$.

III.1 -

a) - Trouver l'ensemble P_1 des points du plan x 0 y où les courbes solutions de (1) admettent une tangente parallèle à 0x.

b) - Trouver l'ensemble P_2 des points du plan x 0 y où les courbes solutions de (1) admettent un point d'inflexion.

c) - Tracer P_1 et P_2 sur un même graphique (on prendra un repère orthogonal tel que les vecteurs unités $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de 0x et 0y aient respectivement des longueurs de 8 et 4 cm).

Indiquer dans chaque région du plan délimitée par 0x, 0y, P_1 et P_2, les signes de y'(x) et y" (x).

III.2 - On étudie dans cette question $y_0(x)$ pour $x \leqslant 0$.

a) - Montrer qu'il existe un voisinage de 0, où :

$$y_0(x) > -\sqrt{-x},\ y_0'(x) > 0 \text{ et } y_0''(x) > 0$$

b) - En utilisant la fonction $z_0(x)$, montrer que $y_0(x)$ est définie et indéfiniment dérivable pour tout $x \leqslant 0$ et reste négative ou nulle (on prolonge ainsi la solution $y_0(x)$ de l'équation (1) sur $\mathbb{R}^-$).

I P 160 I

c) - Montrer par l'absurde que $y_0'(x)$ ne s'annule pas pour $x \leq 0$
(sinon utiliser le plus grand zéro de $y_0'(x)$ après justification de son existence).
En déduire que : $y_0'(x) > 0$ pour tout $x \leq 0$.

d) - Montrer que $y_0''(x) \geq 0$ pour tout $x \leq 0$.
(On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la tangente à $y = y_0(x)$ en un point a où $y_0''(a) < 0$).

e) - Montrer que $y_0'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

f) - En déduire la partie principale de $y_0(x)$ au voisinage de $-\infty$.

II.1 -

a) - Montrer, en utilisant le § I, que $y_0(x)$ admet une asymptote parallèle à Oy.

b) - Que représente l'abscisse de cette asymptote pour la série du I.6 - a) ?

c) - En utilisant les résultats précédents, tracer sur le graphique du III.1- c), de manière approchée, la courbe $y = y_0(x)$.

III.6 - Donner, de manière analogue et sur un graphique identique, l'allure générale des courbes représentant les autres solutions de l'équation (1) définies au voisinage de 0.
(On se bornera à des justifications basées sur les résultats précédents).